



數學科

作者：柯孟凱

指導老師：李威達、何家齊

矩形塗色的對稱與旋轉

本篇研究以對稱軸的方式推算正方形、長方形及三角形的情形數。透過「對稱軸分區討論」，探討每一區之間情形數的關係。又以「情形數展開討論」，利用情形數全數展開等於總組合數的方法，推算其情形數。再以程式撰寫，利用列舉彙整的方式，驗算公式所得數值。三方面推導所求一般公式。

隨後亦討論了對稱軸數量對於情形數的影響，可得「在圖形格數相近時，對稱軸數量越多，其情形數越少」的關係。以及推算情形數及組合數之間的比值關係，可得「正方形之極限值為**0.125**，而三角形則約為**0.166667**」的結論。

研究動機

本日常生活中可隨處見到塗色圖形，在建築、磁磚以及裝置藝術中隨處可見。其中利用旋轉及對稱以增加其多樣性及華麗度的方法亦不在少數。

而在準備**AMC**競試時，歷屆試題裡有一題關於正方形塗色的題目：在**3×3**矩形中（如圖**(1)**），將任兩個位置塗黑，若不考慮旋轉及對稱有多少種情形？經過觀察，邊長不同正方形之間好像有種規律。試想，若將塗色數固定，各邊長正方形會各有幾種組合方式？又將此拓展到長方形以及三角形上，得出的結果又會是如何？若再更進一步拓展到立體圖形上呢？**[3]**

研究目的

- 一、推出各整數邊長之正方形任選塗色兩格的情形數一般公式（如圖**(1)**）。
- 二、推出各整數邊長之長方形任選塗色兩格的情形數一般公式（如圖**(2)**）。
- 三、推出各整數邊長之三角形任選塗色兩格的情形數一般公式（如圖**(3)**）。
- 四、思考各整數邊長之正立方體任選塗色兩塊的推算方法。

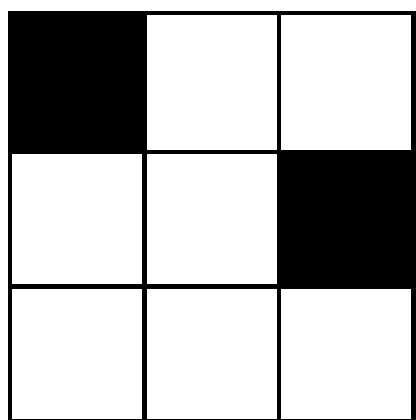


圖 (1)

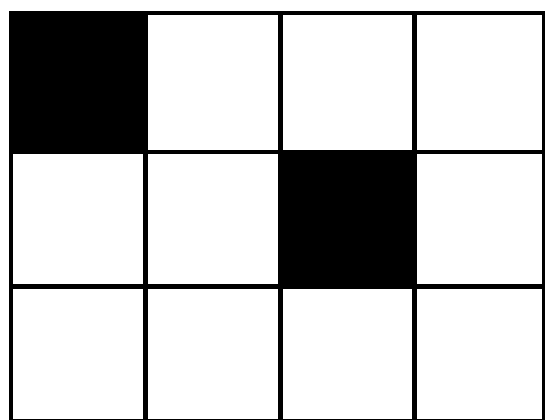


圖 (2)

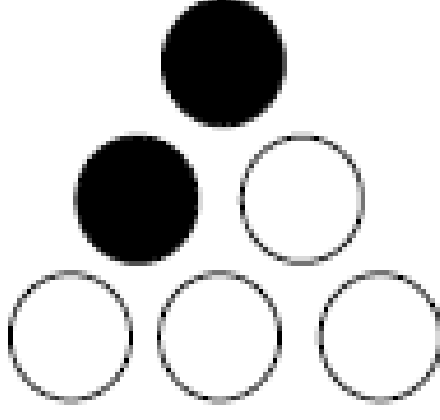


圖 (3)

參考資料

- [1]** Javatpoint。Array Rotation in Java <https://www.javatpoint.com/array-rotation-in-java>
- [2]** ExtendOffice。在 Excel 中列出或生成所有可能的組合 <https://zh-tw.extendoffice.com/documents/excel/3097-excel-list-all-possible-combinations.html>
- [3]** GeoGebra。立體圖形的旋轉對稱<https://www.geogebra.org/m/B7YPYCSc>
- [4]** 許志農 教授。選修數學甲（上）教師用書**(p.7-12)**。龍騰文化

研究結果

一、正方形數量列表及公式

表(7) 正方形各邊長運算結果列舉

邊長 n	3	4	5	6	7	8	9
組合數	36	120	300	630	1176	2016	3240
情形數	8	21	45	93	171	278	446
邊長 n	10	11	12	13	14	15	16
組合數	4950	7260	10296	14196	19110	25200	32640
情形數	660	970	1347	1863	2471	3269	4118

正方形偶數公式： $\frac{1}{16}n^4 + \frac{3}{8}n^2 - \frac{1}{4}n$

正方形奇數公式： $\frac{1}{16}n^4 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{16}$

二、長方形數量列表及公式

表(8) 長方形各邊長運算結果列舉

長 m	3	3	3	3	3	3	3	3
寬 n	4	5	6	7	8	9	10	11
組合數	66	105	153	210	276	351	435	528
情形數	22	34	48	65	84	106	130	157
長 m	4	4	4	4	4	4	4	4
寬 n	5	6	7	8	9	10	11	12
組合數	190	276	378	496	630	780	946	1128
情形數	56	78	106	136	172	210	254	300
長 m	5	5	5	5	5	5	5	5
寬 n	6	7	8	9	10	11	12	13
組合數	435	595	780	990	1225	1485	1770	2080
情形數	123	168	216	274	335	406	480	564
長 m	6	6	6	6	6	6	6	6
寬 n	7	8	9	10	11	12	13	14
組合數	861	1128	1431	1770	2145	2556	3003	3486
情形數	234	300	381	465	564	666	783	903

長方形偶偶公式： $\frac{m^2n^2}{8} + \frac{mn}{4}$

長方形奇偶公式： $\frac{2m^4n-4m^3n+2m^2n+m^2n^2-2mn^2+3n^2+2mn-2n}{8}$

長方形奇奇公式： $\frac{(mn-m-n+1)^2}{8} + \frac{m^2n-mn-1+mn^2}{4}$

研究結論

一、公式彙整

正方形偶數公式： $\frac{n^4+6n^2-4n}{16}$

正方形奇數公式： $\frac{n^4+8n^2-8n-1}{16}$

長方形偶偶公式： $\frac{2m^4n-4m^3n+2m^2n+m^2n^2-2mn^2+3n^2+2mn-2n}{8}$

長方形奇奇公式： $\frac{(mn-m-n+1)^2}{8} + \frac{m^2n-mn-1+mn^2}{4}$

三角形偶數公式： $\frac{n^4+2n^3+8n^2-2n-9}{48}$

三角形奇數公式： $\frac{n^4+2n^3+8n^2-8}{48}$

- 二、對稱軸數量對情形數的影響：在圖形格數相近時，對稱軸的數量越多，其情形數越少。
- 三、組合數與情形數的比較：求極限值可得正方形之極限值為**0.125**，而三角形則約**0.166667**。